2°/a) • $x \mapsto e^x - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

• $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables d'où f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - (f(x))^2$$

b) On a : $-1 < f(x) < 1 \Rightarrow 0 \le f^2(x) < 1 \Rightarrow 1 - f^2(x) > 0$

d'où $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) > 0$.

3°/ f est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 1 - f^2(x) > 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	1

4°/ • f est continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) =]-1,1[$.

• $f^{-1} :]-1,1[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x \Leftrightarrow$$

$$e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \Leftrightarrow e^{2y}(1 - x) = x + 1 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

d'où $\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

5°/a) T : $y = f'(0) \cdot x + f(0)$

or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1 - f^2(0) = 1$ d'où T : $y = x$.